References (transliterated)

1. Filippov A. P., Kokhmanuk S. S., Yanutin E. G. *Deformirovaniye elementov konstruktsiy pod deystviyem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under impact and pulse loads]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978. 183 p.
2. Kokhmanuk S. S., Dmitriev A. S., Shelud'ko G. A. *Dinamika konstruktsiy pri vozdeystvii kratkovremennykh zagruzok* [Dynamics of structures under short-term loads]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989. 304 p.
3. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsiy* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, HNADU PUBL., 2004. 392 p.
4. Olshanskiy V. P., Tishchenko L. N., Olshanskiy S. V. *Kolebaniya sterzhney i plastin pri mekhanicheskom udare* [Oscillations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv, Urban printing Publ., 2012. 320 p.
5. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kubichno neliniynogo ostsylyatora, sprychyneni impul'snym navantazhennyam [Oscillations of a cubically nonlinear oscillator caused by impulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematyhcne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 6 (1228), pp. 86–94.
6. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kvadratychno neliniynogo ostsylyatora sprychyneni impul'snym navantazhennyam [Oscillations of a quadratically nonlinear oscillator caused by impulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnict' mashyn* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Dynamics and durability of machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 39 (1261), pp. 61–68.
7. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya ostsylyatora z m"yakoyu kharakterystykoyu pruzhnosti, sprychyneni sylovym impul'som [Oscillations of an oscillator with soft characteristic of elasticity caused by force pulse]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh : Vseukrayins'kyy naukovo-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in engineering and technologies : All-Ukrainian scientific and technical journal]. Vinnytsya, 2018, no. 1 (88), pp. 38–45.

Надійшла (received) 24. 09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО УДАР В'ЯЗКО-ПРУЖНОГО ТІЛА ОБ ЖОРСТКУ ПЕРЕШКОДУ

Проведено математичне моделювання удару в'язко-пружного тіла з невеликою швидкістю об нерухому абсолютно жорстку перешкоду. В основу моделі покладено теорію удару, запропоновану Г. Герцем, але додатково враховано втрати енергії при деформуванні одного із тіл. Аналітичний розв'язок нелінійної задачі виражено через затабульовану двохзначну функцію Ламберта від'ємного аргументу. Показано, що максимум зусилля удару досягається раніше, ніж максимум зближення тіл при їх стисканні, а коефіцієнт відновлення швидкості залежить від початкової швидкості зіткнення тіл. Він зменшується зі зростанням цієї швидкості.

Ключові слова: нормальний удар, в'язко-пружне тіло, абсолютно жорстка перешкода, еліптична площадка контакту, коефіцієнт відновлення швидкості, нелінійне диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок.

В. П. ОЛЬШАСКИЙ

ПРО УДАР ВЯЗКО-УПРУГОГО ТЕЛА О ЖЕСТКОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ

Проведено математическое моделирование удара вязко-упругого тела с небольшой скоростью о неподвижное абсолютно жесткое препятствие. В основу модели положена теория удара, предложенная Г. Герцем, но дополнительно учтены потери энергии при деформировании одного из тел. Аналитическое решение нелинейной задачи выражено через затабулированную двухзначную функцию Ламберта отрицательного аргумента. Показано, что максимум усилия удара достигается раньше, нежели максимум сближения тел при сжатии, а коэффициент восстановления скорости зависит от начальной скорости столкновения тел. Он уменьшается с увеличением этой скорости.

Ключевые слова: нормальный удар, вязко-упругое тело, абсолютно жесткое препятствие, эллиптическая площадка контакта, коэффициент восстановления скорости, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое решение.

V. P. OLSHANSKIY

ON THE IMPACT OF A VISCO-ELASTIC BODY ON A RIGID OBSTACLE

Mathematical modeling of the impact of a low speed visco-elastic body on a fixed absolutely rigid obstacle is carried out. The model is based on the theory of impact proposed by G. Hertz, but additionally takes into account the loss of energy during the deformation of one of the bodies. The analytical solution of the non-linear problem is expressed in terms of the negative-argument tabulated two-valued Lambert function. It is shown that the maximum impact force is reached earlier than the maximum approach of the bodies during compression, and the coefficient of speed recovery depends on the initial velocity of the bodies colliding. It decreases as speed increases.

Key words: normal impact, visco-elastic body, absolutely rigid obstacle, elliptical contact area, speed recovery factor, nonlinear differential equation, analytical solution.

Вступ. Теорія удару, яку запропонував *Г. Герц* [1, 2], грунтується на врахуванні лише місцевих контактних деформацій і стосується ідеально пружних тіл. За цією теорією при нормальному ударі тіла об абсолютно жорстку перешкоду коефіцієнт відновлення швидкості дорівнює одиниці, що не підтверджується практикою. В дійсності, цей коефіцієнт менший одиниці, внаслідок втрати енергії при деформуванні тіл. Один із простих способів урахування цих втрат полягає в заміні ідеально пружного тіла на в'язко-пружне. Саме про таку заміну йдеться в цій статті, де припускається, що втрати енергії залежать від швидкості деформацій.

Метою роботи є математичне моделювання удару в'язко-пружного тіла об абсолютно жорстку перешкоду при невеликих швидкостях зіткнення тіл. Для досягнення поставленої мети використано припущення, властиві *теорії Г. Герца*, але додатково враховано в'язкість при деформуванні одного із тіл, що призводить до нових розрахункових формул і нових закономірностей.

Постановка задачі та її розв'язок. Тіло, яке піддається удару, вважаємо нерухомим абсолютно жорстким півпростором з плоскою поверхнею контакту. Поверхню в'язко-пружного тіла, що вдаряє,? в області контакту апроксимуємо параболоїдом:

$$z=\frac{x^2}{2R_1}+\frac{y^2}{2R_2},$$

де R_1, R_2 – його головні радіуси кривизни.

Такі припущення можливі, коли модуль пружності та маса тіла, що вдаряє, значно менші за аналогічні характеристики тіла, що сприймає удар. Йдеться насамперед про удар тіл рослинного походження (зернівки, деякі овочі та фрукти) об жорстку підлогу або масивну металеву платформу транспортного засобу. Такі варіанти удару можливі також в деяких технологічних процесах сепарування зерна [3].

У відповідності з вказаними спрощеннями, переміщення центру мас в'язко-пружного тіла $x(t)$ з моменту зіткнення з півпростором описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x}=-\beta(1+\eta\dot{x})\,x^{3/2}. \qquad (1)$$

Тут $\eta=\xi/E$; m – маса тіла, що вдаряє по півпростору; ξ – сталий коефіцієнт в'язкості матеріалу; β – сталий коефіцієнт контактних деформацій; крапка над x означає похідну за часом t.

Для обчислення значення β використовуємо відомий розв'язок контактної задачі теорії пружності [4, 5]:

$$\beta=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}R_1^{1/2}\frac{[D(\varepsilon)]^{1/2}}{[K(\varepsilon)]^{3/2}},$$

у якому $D(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}[K(\varepsilon)-L(\varepsilon)]$; E,ν – модуль пружності та *коефіцієнт Пуассона* тіла, що вдаряє; ε – ексцентриситет еліптичної площадки контакту двох тіл під час удару; $K(\varepsilon), L(\varepsilon)$ – повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого роду, затабульовані в [6, 7] та інших виданнях зі спеціальних функцій.

У випадку $R_1=R_2$, $\varepsilon=0$, $D(\varepsilon)=\pi/4$; $K(\varepsilon)=\pi/2$ маємо кругову площадку контакту і для неї:

$$\beta=\frac{4}{3}\frac{E}{1-\nu^2}R_1^{1/2},$$

що використано в [8], де приймали $\eta=0$.

Ексцентриситет ε залежить від відношення R_2/R_1 головних радіусів кривизни граничної поверхні в'язко-пружного тіла. З метою спрощення обчислень β, а також інших величин, які характеризують удар, наводимо складену спеціальну табл. 1.

Таблиця 1 – Значення ε^2, $K(\varepsilon)$ і $D(\varepsilon)$ для різних R_2/R_1

$10\,R_2/R_1$	$10\,\varepsilon^2$	$K(\varepsilon)$	$D(\varepsilon)$	$10\,R_2/R_1$	$10\,\varepsilon^2$	$K(\varepsilon)$	$D(\varepsilon)$
0,2	9,93	3,872	2,881	5,2	5,81	1,930	1,069
0,4	9,84	3,464	2,480	5,4	5,60	1,909	1,051
0,6	9,74	3,226	2,249	5,6	5,38	1,888	1,034
0,8	9,63	3,054	2,084	5,8	5,16	1,868	1,018
1,0	9,50	2,908	1,945	6,0	4,94	1,849	1,003
1,2	9,38	2,805	1,848	6,2	4,71	1,830	0,988
1,4	9,24	2,708	1,757	6,4	4,48	1,812	0,973
1,6	9,10	2,628	1,683	6,6	4,25	1,795	0,959
1,8	8,95	2,555	1,616	6,8	4,02	1,779	0,946
2,0	8,80	2,493	1,559	7,0	3,78	1,763	0,933
2,2	8,65	2,438	1,509	7,2	3,55	1,748	0,922
2,4	8,48	2,383	1,460	7,4	3,31	1,732	0,910
2,6	8,32	2,337	1,419	7,6	3,06	1,717	0,898

Продовження таблиці 1

2,8	8,15	2,293	1,380	7,8	2,82	1,704	0,887
3,0	7,97	2,250	1,342	8,0	2,57	1,690	0,876
3,2	7,79	2,212	1,309	8,2	2,32	1,676	0,866
3,4	7,61	2,177	1,278	8,4	2,07	1,663	0,856
3,6	7,42	2,142	1,248	8,6	1,82	1,651	0,846
3,8	7,23	2,111	1,221	8,8	1,57	1,639	0,837
4,0	7,04	2,081	1,196	9,0	1,31	1,626	0,827
4,2	6,84	2,052	1,172	9,2	1,05	1,615	0,819
4,4	6,64	2,025	1,149	9,4	0,79	1,603	0,810
4,6	6,44	2,000	1,127	9,6	0,53	1,592	0,802
4,8	6,23	1,975	1,107	9,8	0,27	1,582	0,793
5,0	6,02	1,952	1,087	10,0	0,00	1,571	0,785

Етап стискання тіл. Розв'язок диференціального рівняння (1) на етапі стискання тіл будуємо при початкових умовах:

$$x(0)=0\,;\ \dot{x}(0)=\upsilon_0\,, \tag{2}$$

де υ_0 – швидкість зіткнення тіл. Для цього подаємо (1) у вигляді:

$$m\,\dot{x}\frac{d\,\dot{x}}{d\,x}=-\beta\left(1+\eta\,\dot{x}\right)x^{3/2}\,. \tag{3}$$

Подальшим інтегруванням після розділення змінних в (3), отримуємо з точністю до сталої c:

$$\frac{1}{\eta^2}\left[\eta\,\dot{x}-\ln\left(1+\eta\,\dot{x}\right)\right]=c-\frac{2}{5}\frac{\beta}{m}x^{5/2}\,.$$

Задовольнивши початковим умовам (2), знаходимо, що:

$$c=\frac{1}{\eta^2}\left[\eta\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\upsilon_0\right)\right].$$

Таким чином, перший інтеграл рівняння руху (1) набуває вигляд:

$$1+\eta\,\dot{x}-\ln\left(1+\eta\,\dot{x}\right)=f\left(x\right), \tag{4}$$

де $f\left(x\right)=1+\eta\,\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\,\upsilon_0\right)-\frac{2}{5}\frac{\beta}{m}\eta^2x^{5/2}$.

Розв'язок функціонального рівняння (4) виражається через другу гілку $W_2\left(-\zeta\right)$ *двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу* [9]. Тому:

$$1+\eta\,\dot{x}=-W_2\left[-\exp\left(-f\left(x\right)\right)\right].$$

Звідки випливає, що:

$$\dot{x}=-\frac{1}{\eta}\left\{1+W_2\left[-\exp\left(-f\left(x\right)\right)\right]\right\}. \tag{5}$$

При обчисленні $\dot{x}$ значення $W_2\left(-\zeta\right)$ можна знаходити за допомогою табл. 1.2, що надрукована в [9]. Там $W_2\left[-\exp\left(-1\right)\right]=-1$. Тому при $f\left(x\right)=1$ швидкість $\dot{x}=0$. Отже, максимальне зближення тіл x_c при динамічному стисканні, коли $\dot{x}=0$, визначається рівнянням $f\left(x\right)=1$ або:

$$\eta\,\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\,\upsilon_0\right)-\frac{2}{5}\frac{\beta}{m}\eta^2x^{5/2}=0\,.$$

Звідки одержуємо:

$$x=x_c=\left\{\frac{5m}{2\beta\eta^2}\left[\eta\,\upsilon_0-\ln\left(1+\eta\,\upsilon_0\right)\right]\right\}^{2/5}. \tag{6}$$

Граничний перехід $\eta\to 0$ в (6) дає:

$$x_c=\left(\frac{5m\upsilon_0^2}{4\beta}\right)^{2/5},$$

що узгоджується з [8, 10].

В момент максимального стискання тіл піввісі області контакту a_c, b_c дорівнюють:

$$a_c=\left[2R_1\,\frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)}x_c\right]^{1/2};\ \ b_c=a_c\sqrt{1-\varepsilon^2}\,,$$

а зусилля удару F_c і тиск в центрі площадки контакту q_c подаються формулами:

$$F_c = \beta x_c^{3/2}; \quad q_c = \frac{3}{2}\frac{F_c}{\pi a_c b_c}.$$

Зазначимо, що на відміну від удару абсолютно пружних тіл, F_c і q_c не є максимальними. Щоб знайти максимуми цих величин, дослідимо на екстремум функцію:

$$F(t) = \beta(1+\eta\dot{x})x^{3/2}. \tag{7}$$

Прирівнявши до нуля похідну з виразу (7), одержуємо рівняння:

$$\eta x\ddot{x} + \frac{3}{2}(1+\eta\dot{x})\dot{x} = 0. \tag{8}$$

Далі, використовуючи (1), йому надаємо вигляд:

$$\eta\dot{x} = \frac{2}{3}\frac{\beta\eta^2}{m}x^{5/2}. \tag{9}$$

Щоб вилучити тут невідоме $x^{5/2}$, врахуємо (4), звідки випливає, що:

$$\frac{2}{5}\frac{\beta\eta^2}{m}x^{5/2} = \eta\upsilon_0 - \ln(1+\eta\upsilon_0) - \eta\dot{x} - \ln(1+\eta\dot{x}).$$

Тому, у підсумку, замість (8), одержуємо:

$$\frac{8}{5} + \frac{8}{5}\eta\dot{x} - \ln\left(\frac{8}{5} + \frac{8}{5}\eta\dot{x}\right) = F(\upsilon_0), \tag{10}$$

де $F(\upsilon_0) = \frac{8}{5} - \ln\frac{8}{5} + \eta\upsilon_0 - \ln(1+\eta\upsilon_0)$.

Розв’язок функціонального рівняння (10) виражається через другу гілку $W_2(-\zeta)$ двозначної функції Ламберта від’ємного аргументу [9]. Тому:

$$\dot{x} = \dot{x}_e = -\frac{1}{\eta}\left\{1 + \frac{5}{8}W_2\left[-\exp\left(-F(\upsilon_0)\right)\right]\right\}$$

і, згідно з (9), цій швидкості відповідає стискання:

$$x = x_e = \left(\frac{3}{2}\frac{m}{\beta\eta}\dot{x}_e\right)^{2/5}.$$

Отже максимум сили стискання F_e дорівнює:

$$F_e = \beta(1+\eta\dot{x}_e)x_e^{3/2}.$$

При цьому максимальний тиск в центрі площадки контакту становить:

$$q_e = \frac{3}{2}\frac{F_e}{\pi a_e b_e},$$

де $a_e = \left[2R_1\frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)}x_e\right]^{1/2}$; $b_e = a_e\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Для обчислення максимального зусилля удару і тиску, який йому відповідає, можна теж використовувати табл. 1.2 в [9], яка стосується другої гілки функції Ламберта від’ємного аргументу.

Час t_e, коли досягається максимум сили удару, подається інтегралом:

$$t_e = \eta\int_{x_e}^{0}\frac{dx}{1+W_2\left[-\exp\left(-f(x)\right)\right]}.$$

Він не виражається в елементарних, чи відомих спеціальних функціях, але його досить просто обчислювати на комп’ютері в *середовищі «Maple»* [11], де передбачено обчислення значень $W_2(-\zeta)$.

Тривалість етапу стискання t_c при ударі становить:

$$t_c = \eta\int_{x_c}^{0}\frac{dx}{1+W_2\left[-\exp\left(-f(x)\right)\right]}.$$

Цей інтеграл відноситься до невласних інтегралів другого роду, бо при $x = x_c$ підінтегральна функція є нескінченною. Але значення t_c теж можна обчислювати на комп’ютері, після виділення і аналітичного інтегрування сингулярної частини. Для цього слід використати асимптотику:

$$\dot{x} \to \left(2\frac{\beta}{m}x_c^{3/2}y\right)^{1/2} \quad \text{при } x \to x_c - y, \ y \to 0.$$

Тоді:

$$t_c \approx \frac{\sqrt{2m\,y}}{\beta\, x_c^{3/2}} + \eta \int_{x_c - y}^{0} \frac{d\,x}{1 + W_2\left[-\exp\left(-f\left(x\right)\right)\right]}.$$

Задавши малим значення y порівняно з x_c, другий доданок (квадратуру) тут досить просто обчислити на комп'ютері любим із числових методів в середовищі «Maple».

Етап розтискання тіл. На етапі розтискання розв'язуємо рівняння (3) при початковій умові:

$$\dot{x}\left(x_c\right) = 0.$$

Провівши його інтегрування, отримуємо:

$$1 + \eta\,\dot{x} - \ln\left(1 + \eta\,\dot{x}\right) = \varphi\left(x\right), \tag{11}$$

де:

$$\varphi\left(x\right) = 1 + \frac{2}{5}\frac{\beta\eta^2}{m}\left(x_c^{5/2} - x^{5/2}\right). \tag{12}$$

Розв'язок рівняння (11) виражається через першу гілку $W_1\left(-\zeta\right)$ двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу [12] і має вигляд:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\eta}\left\{1 + W_1\left[-\exp\left(-\varphi\left(x\right)\right)\right]\right\}.$$

Значення цієї функції для окремих аргументів вказано в табл. 1.1 в [9], що спрощує обчислення $\dot{x}$, яке тепер від'ємне або дорівнює нулю.

Тривалість етапу розтискання t_p при ударі подається інтегралом:

$$t_p = \eta \int_{0}^{x_c} \frac{d\,x}{1 + W_1\left[-\exp\left(-\varphi\left(x\right)\right)\right]},$$

що належить до невласних збіжних інтегралів другого роду. Його теж можна обчислювати на комп'ютері, після виділення сингулярності в точці $x = x_c$.

Швидкість υ_1, яку має в'язко-пружне тіло в кінці процесу удару, можна знайти за формулою:

$$\upsilon_1 = -\frac{1}{\eta}\left\{1 + W_1\left[-\exp\left(-1 - \eta\,\upsilon_0 + \ln\left(1 + \eta\,\upsilon_0\right)\right)\right]\right\},$$

що випливає з (11), з урахуванням (12).

Тому коефіцієнт відновлення швидкості K подається виразом:

$$K = \frac{\left|\upsilon_1\right|}{\upsilon_0} = \frac{1}{\eta\upsilon_0}\left\{1 + W_1\left[-\exp\left(-1 - \eta\,\upsilon_0 + \ln\left(1 + \eta\,\upsilon_0\right)\right)\right]\right\}.$$

Коефіцієнт K залежить від значення $\eta\upsilon_0$. Ця залежність графічно подана на рис. 1.

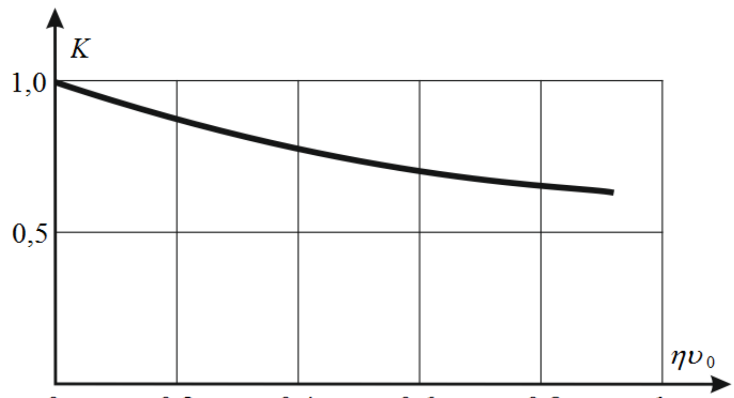

Рис. 1 – Залежність K від $\eta\upsilon_0$.

При $\eta = \mathrm{const}$ зі зростанням швидкості удару υ_0 маємо зменшення коефіцієнта відновлення швидкості.

Зазначимо, що наведений вище графік можна також використовувати для ідентифікації значення коефіцієнта в'язкості ξ при експериментальному вимірюванні K для заданих υ_0. Наприклад, коли $K = 0{,}75$, то $\eta\upsilon_0 \approx 0{,}5$, і в цьому випадку $\xi = 0{,}5E/\upsilon_0$.

З метою перевірки вірогідності виведених формул проведемо розрахунки параметрів удару гумової кульки по півпростору. Приймаємо наступні числові дані: $R_1 = R_2 = 10^{-2}$ м; $E = 4,5 \cdot 10^6$ Па; $\nu = 0,5$; $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\upsilon_0 = 4$ м/с; $\eta\upsilon_0 = 0,4$. Для цих вихідних даних знаходимо: $\beta = 8 \cdot 10^5$ Па$\cdot$м$^{1/2}$; $m = 6,283 \cdot 10^{-3}$ кг; $x_c = 0,00173$ м; $a_c = b_c = 0,00416$ м; $F_c = 57,565$ Н; $q_c = 1,588 \cdot 10^6$ Па; $F(\upsilon_0) = 1,1935$; $W_2 = -1,757$; $\dot{x}_e = 0,981$ м/с; $x_e = 0,00168$ м; $F_e = 60,492$ Н; $q_e = 1,719 \cdot 10^6$ Па; $W_1 = -0,6841$; $\upsilon_1 = -3,159$ м/с; $K = 0,79$. Розрахунки підтвердили, що $F_e > F_c$, а $q_e > q_c$.

Перспективи подальших досліджень. Викладений спосіб можна поширити на випадок нелінійної залежності зусилля удару від швидкості зіткнення тіл. Зокрема, аналітичний розв'язок можна одержати, коли сила удару залежить від квадрату швидкості.

Висновки. В рамках розглянутої моделі аналітичний розв'язок нелінійної задачі удару виражається через затабульовану спеціальну функцію Ламберта. Максимум зусилля удару і максимум контактного тиску досягаються не в момент максимального стискання тіл, а дещо раніше в ході стискання. Коефіцієнт відновлення швидкості залежить не лише від коефіцієнта в'язкості та модуля пружності матеріалу деформованого тіла, а й від швидкості удару. Він зменшується зі зростанням цієї швидкості.

Список літератури

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – Москва : Стройиздат, 1965. – 447 с.
2. *Кильчевский Н. А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев : Наукова думка, 1989. – 304 с.
3. *Богомолов А. В.* Сепарация трудноразделимых сыпучих смесей. – Харьков : ХНТУСГ, 2013. – 308 с.
4. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. – Москва – Ленинград : ОГИЗ, 1947. – 465 с.
5. *Гурняк Л. І.*, *Гуцуляк Ю. В.*, *Юзків Т. Б.* Опір матеріалів. – Львів : Новий світ, 2005. – 364 с.
6. *Абрамовиц А.*, *Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – Москва : Наука, 1979. – 832 с.
7. *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Лёш Ф.* Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
8. *Ольшанський В. П.*, *Ольшанский С. В.* Ateb-синус у розвязку задачі Герца про удар // Вісник НТУ «ХПІ» Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98 – 103.
9. *Ольшанський В. П.*, *Ольшанский С. В.* Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. – Харьков : Издатель Савчук А.О., 2013. – 204 с.
10. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механического удара. – Москва : Наука, 1987. – 223 с.
11. *Дьяконов В. П.* Maple 8 в математике, физике и образовании. – Москва : Солон-Пресс, 2013. – 656 с.
12. *Ольшанський В. П.*, *Ольшанский С. В.* Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 116 – 119.

References (transliterated)

1. Goldsmith W. *Udar. Teoriya i fizicheskiye svoystva soudaryaemykh tel* [Impact. Theory and physical properties of colliding bodies]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1965. 447 p.
2. Kil'chevskiy N. A. *Dinamacheskoye kontaktnoye szhatiye tvyerdykh tel. Ydar* [Dynamic contact compression of solids. Blow]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989. 304 p.
3. Bogomolov A. V. *Separatsiya trudnorazdelimykh sypuchikh smesey* [Separation of hardly separable loose mixtures]. Kharkov, KNTUSG Publ., 2013. 308 p.
4. Leibenzon L. S. *Kurs teorii uprugosti* [Course in elasticity theory]. Moscow–Leningrad, OGIZ Publ., 1947. 465 p.
5. Gurniak L. I., Gutsulyak Yu. V., Yuzkiv T. B. *Opir materialiv* [Resistance of materials]. Lviv, Novyy svit Publ., 2005. 364 p.
6. Abramovits A., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Science Publ., 1979. 832 p.
7. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
8. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Ateb-synus u rozvyazku zadachi Gertsa pro udar [Ateb-sine in the solution of Hertz's problem of impact]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi* ta *tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, no. 3 (1279), pp. 98–103.
9. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki material'noy tochki* [Lambert function in the material point ballistics problems]. Kharkiv, Publisher Savchuk A.O., 2013. 204 p.
10. Panovko Ya. G. *Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskogo udara* [Introduction to the theory of mechanical shock]. Moscow, Science Publ., 1987. 223 p.
11. D'yakonov V. P. *Maple 8 v matematike, fizike i obrazovanii* [Maple 8 in mathematics, physics and education]. Moscow, Solon-Press Publ., 2013. 656 p.
12. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Funktsiya Lamberta v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [Lambert function in the mathematical pendulum oscillation problem]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi* ta *tekhnologiyakh* [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 18 (1061), pp. 116–119.

Надійшла (received) 24.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.